ΘΕΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2016

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.

Αν f ΄(x)>0 στο (α, x_0) και f ΄ (x)<0 στο (x_0, β), τότε να αποδείξετε ότι το f(x_0) είναι τοπικό μέγιστο της f.

Μονάδες 7

Α2. Πότε δύο συναρτήσεις f, g λέγονται ίσες;

Μονάδες 4

Α3. Να διατυπώσετε το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to R$, αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α, β], τότε το $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\alpha)-G(\beta)$.

β) Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει f(x)≤g(x) κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \le \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

γ) Κάθε συνάρτηση f, για την οποία ισχύει f ΄ (x)=0 για κάθε $x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0, \beta)$, είναι σταθερή στο $(\alpha,x_0)\cup(x_0, \beta)$.

δ) Μια συνάρτηση f είναι 1-1, αν και μόνο αν, για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της, η εξίσωση y=f(x) έχει ακριβώς μια λύση ως προς x.

ε) Αν η f είναι συνεχής στο [α, β], τότε η f παίρνει στο [α, β] μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$, $x\in R$.

Β1. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως φθίνουσα και τα ακρότατα της f.

Μονάδες 6

Β2. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η είναι κυρτή, τα διαστήματα στα οποία η f είναι κοίλη και να προσδιορίσετε τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

Μονάδες 9

Β3. Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

Μονάδες 7

Β4. Με βάση τις απαντήσεις σας στα ερωτήματα **Β1**, **Β2**, **Β3** να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

(Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό).

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Να λύσετε την εξίσωση $e^{x^2}-x^2-1=0$, $x\in R$.

Μονάδες 4

Γ2. Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f:R\to R$ που ικανοποιούν την σχέση $f^2(x)=\left(e^{x^2}-x^2-1\right)^2$ για κάθε $x\in R$ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 8

Γ3. Αν $f(x)= e^{x^2}-x^2-1$, $x\in R$, να αποδειχθεί ότι η f είναι κυρτή.

Μονάδες 4

Γ4. Αν η f είναι η συνάρτηση του ερωτήματος **Γ3**, να λυθεί η εξίσωση:

$f(|\eta\mu x|+3)-f(|\eta\mu x|)=f(x+3)-f(x)$

όταν $x\in[0, +\infty)$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο R, με συνεχή δεύτερη παράγωγο, για την οποία ισχύει ότι:

- $\int_0^{\pi}\left(f\left(x\right)+f''\left(x\right)\right)\eta\mu x\ dx=\pi$
- $f\left(R\right)=R$ και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f\left(x\right)}{\eta\mu x}=1$
- $e^{f(x)}+x=f\left(f\left(x\right)\right)+e^{x}$ για κάθε $x\in R$.

Δ1. Να δείξετε ότι $f(\pi)=\pi$ (μονάδες 4) και $f'(0)=1$.

Μονάδες 7

Δ2. **α)** Να δείξετε ότι η f δεν παρουσιάζει ακρότατα στο R. (μονάδες 4)

β) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο R. (μονάδες 2)

Μονάδες 6

Δ3. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f\left(x\right)}$.

Μονάδες 6

Δ4. Να δείξετε ότι $0<\int_1^{e^{\pi}}\dfrac{f\left(\ln x\right)}{x}dx<\pi^2$.

Μονάδες 6

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη σχολικού βιβλίου σελίδα 262.

Α2. Ορισμός σχολικου βιβλίου σελίδα 141.

Α3. Θεώρημα σχολικού βιβλίου σελίδα 246.

Α4. **α.** Λάθος

β. Σωστό

γ. Λάθος

δ. Σωστό

ε. Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο R με $f'(x) = \ldots = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$.

Το πρόσημο της f ΄ και τα διαστήματα μονοτονίας της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f ΄	-	+	
f	↘	↗	

Ο.Ε.

Η f είναι γν. φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$, η f είναι γν. αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

Στο x=0 η f παρουσιάζει ελάχιστο το f(0)=0.

Β2. Η f ΄ είναι παραγωγίσιμη στο R με $f''(x)=\ldots=\frac{-6x^2+2}{(x^2+1)^3}$.

Το πρόσημο της f ΄΄ και τα διαστήματα κυρτότητας της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

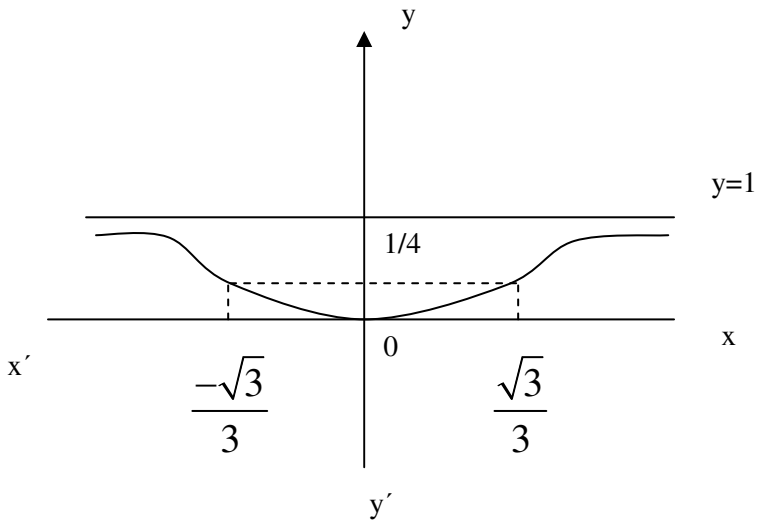
x	-∞	$-\sqrt{3}/3$		$\sqrt{3}/3$	-∞
f΄΄		-	+		-
f		∩	∪	∩	

Σ.Κ Σ.Κ

Η f είναι κυρτή στο $\left[\frac{-\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$, η f είναι κοίλη στο $(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}]$ και στο $[\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty)$. Τα σημεία $A\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{1}{4}\right)$ και $B\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{1}{4}\right)$ είναι σημεία καμπής της C_f.

Β3. Επειδή $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=1$ τότε η ευθεία y=1 είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ και στο $-\infty$. Επίσης η C_f δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες αφού η f είναι συνεχής στο R.

Β4.



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=e^x-x-1$, $x\in R$.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο R με $g΄(x)=e^x-1$.

$g΄(x)=0\Leftrightarrow x=0$

$g΄(x)>0\Leftrightarrow x>0$

$g'(x)<0 \Leftrightarrow x<0$

Άρα στο $x_0=0$ η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $g(0)=0$.

Επομένως $g(x)\geq 0$, $x\in R$. Το ίσον ισχύει μόνο για $x=0$.

Έχουμε $e^{x^2}-x^2-1=0 \Leftrightarrow g(x^2)=0 \Leftrightarrow x^2=0 \Leftrightarrow x=0$.

Γ2. Έχουμε $f(x)=0 \Leftrightarrow f^2(x)=0 \Leftrightarrow \left(e^{x^2}-x^2-1\right)^2=0 \Leftrightarrow$

$e^{x^2}-x^2-1=0 \Leftrightarrow x=0$.

Για κάθε $x\in R$ έχουμε $f^2(x)=\left(e^{x^2}-x^2-1\right)^2 \Leftrightarrow |f(x)|=\left|e^{x^2}-x^2-1\right|$ και αφού $e^{x^2}-x^2-1>0$, $x\in R^*$ τότε $|f(x)|=e^{x^2}-x^2-1$, $x\in R^*$.

- Η συνάρτηση f στο $(-\infty,0)$ είναι συνεχής και δεν μηδενίζεται σ' αυτό, οπότε η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(-\infty, 0)$.

- Αν $f(x)>0$, $x\in(-\infty,0)$ τότε $f(x)=e^{x^2}-x^2-1$

- Αν $f(x)<0$, $x\in(-\infty,0)$ τότε $f(x)=-\left(e^{x^2}-x^2-1\right)$

- Η συνάρτηση f στο $(0, +\infty)$ είναι συνεχής και δεν μηδενίζεται σ' αυτό, οπότε η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0, +\infty)$.

- Αν $f(x)>0$, $x\in(0, +\infty)$ τότε $f(x)=e^{x^2}-x^2-1$

- Αν $f(x)<0$, $x\in\in(0, +\infty)$ τότε $f(x)=-\left(e^{x^2}-x^2-1\right)$

Άρα $f(x)=e^{x^2}-x^2-1$, $x\in R$ ή $f(x)=-\left(e^{x^2}-x^2-1\right)$, $x\in R$ ή

$$f(x)=\begin{cases} e^{x^2}-x^2-1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ -\left(e^{x^2}-x^2-1\right), & x>0 \end{cases} \quad \text{ή} \quad f(x)=\begin{cases} -\left(e^{x^2}-x^2-1\right), & x<0 \\ 0, & x=0 \\ e^{x^2}-x^2-1, & x>0 \end{cases}$$

Γ3. Έχουμε f'(x)=$2x\cdot e^{x^2}-2x$, $x\in R$ και

$$f''(x)=2\left(e^{x^2}-1\right)+4x^2\cdot e^{x^2},\ x\in R$$

Για κάθε $x\in R^*$ ισχύουν $e^{x^2}-1>0$ και $x^2\cdot e^{x^2}>0$

Άρα $f''(x)>0$ για κάθε $x\in R^*$ και αφού η f είναι συνεχής στο $x_0=0$ τότε η f είναι κυρτή στο R.

Γ4. Θεωρούμε τη συνάρτηση h(x)=f(x+3)-f(x), $x\in R$

h΄(x)=f΄(x+3)-f΄(x), $x\in R$

Επειδή η f είναι κυρτή στο R τότε η f΄ είναι γνησίως αύξουσα στο R και αφού x+3>x, $x\in R$ τότε f΄(x+3)>f΄(x), $x\in R$

Επομένως h΄ (x)>0 για κάθε $x\in R$. Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο R, οπότε η h είναι 1-1.

Για κάθε $x\in[0,\ +\infty)$ έχουμε $f\left(|\eta\mu x|+3\right)-f\left(|\eta\mu x|\right)=f\left(x+3\right)-f\left(x\right)$

$\Leftrightarrow h(|\eta\mu x|)=h(x) \overset{h\ 1-1}{\Leftrightarrow} |\eta\mu x|=x\Leftrightarrow x=0$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έχουμε $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{\eta\mu x}=1$.

Θέτουμε $g(x)=\dfrac{f(x)}{\eta\mu x}$ για x κοντά στο 0, οπότε $\lim\limits_{x\to0}g(x)=1$ και $f(x)=g(x)\cdot\eta\mu x$ για x κοντά στο 0.

Άρα $f(0)=\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\left(g(x)\cdot\eta\mu x\right)=1\cdot0=0$ αφού η f είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη στο R.

Έχουμε $\int_0^{\pi}f(x)+f''(x)\eta\mu x\ dx=\pi\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow f(\pi)+f(0)=\pi$ οπότε $f(\pi)=\pi$.

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{g(x)\cdot\eta\mu x}{x}=1$$

Δ2. α) Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο R έχουμε $\left(e^{f(x)}+x\right)'=\left(f\left(f\left(x\right)\right)+e^{x}\right)'\Leftrightarrow e^{f(x)}\cdot f'\left(x\right)+1=f'\left(f\left(x\right)\right)\cdot f'\left(x\right)+e^{x}$, $x\in R$ (1)

Έστω ότι η f παρουσιάζει ακρότατο στο $x=x_0$. Από θ. Fermat έχουμε $f'(x_0)=0$. Οπότε η σχέση (1) για $x=x_0$ γίνεται $e^{x_0}=1\Leftrightarrow x_0=0$ δηλαδή $f'(0)=0$ ΑΤΟΠΟ αφού $f'(0)=1$. Άρα η f δεν παρουσιάζει ακρότατα στο R.

β) Αφού $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in R$ και η f' είναι συνεχής στο R τότε διατηρεί σταθερό πρόσημο στο R. Επειδή $f'(0)=1>0$ τότε $f'(x)>0$ για κάθε $x\in R$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο R.

Δ3. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)=+\infty$ αφού f(R)=R και η f είναι γν. αύξουσα στο R.

Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ ισχύει $f(x)>f(0)=0$ και

$$\left|\frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f\left(x\right)}\right|=\frac{\left|\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x\right|}{\left|f\left(x\right)\right|}\leq\frac{\left|\eta\mu x\right|+\left|\sigma\upsilon\nu x\right|}{f\left(x\right)}\leq\frac{2}{f\left(x\right)}$$

Άρα $-\frac{2}{f\left(x\right)}\leq\frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f\left(x\right)}\leq\frac{2}{f\left(x\right)}$ και αφού

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{2}{f\left(x\right)}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{f\left(x\right)}=0$, τότε από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f\left(x\right)}=0$

Δ4. Θέτουμε $u=\ln x$

$$du=\frac{1}{x}dx$$

Για $x=1$: $u=\ln1=0$

Για $x=e^{\pi}$: $u=\ln e^{\pi}=\pi$

Άρα $\int_1^{e^{\pi}}\frac{f\left(\ln x\right)}{x}dx=\int_0^{\pi}f\left(u\right)du$

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο [0, π] οπότε για κάθε $u\in[0,\pi]$ ισχύει ότι $f(0)\le f(u)\le f(\pi)\Leftrightarrow 0\le f(u)\le\pi\Leftrightarrow f(u)\ge 0$ και $\pi-f(u)\ge 0$ με το ίσον να ισχύει μόνο για x=0.

Άρα $\int_0^\pi f(u)du>0$ και $\int_0^\pi(\pi-f(u))du>0\Leftrightarrow\int_0^\pi f(u)du>0$ και

$[\pi x]_0^\pi-\int_0^\pi f(u)du>0\Leftrightarrow\int_0^\pi f(u)du>0$ και

$\int_0^\pi f(u)du<\pi^2\Leftrightarrow 0<\int_0^\pi f(u)du<\pi^2$

Επομένως $0<\int_1^{e^\pi}\frac{f(\ln x)}{x}dx<\pi^2$

ΤΙΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΕΠΙΜΕΛΗΘΗΚΕ Ο ΤΟΜΕΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΤΩΝ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ

«ΟΜΟΚΕΝΤΡΟ» ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΥ

www.floropoulos.gr

ΓΕΩΡΓΑΚΟΠΟΥΛΟΣ Β. - ΚΟΥΣΗΣ Π. - ΤΖΩΡΤΖΙΝΗΣ Γ. – ΦΙΛΙΟΓΛΟΥ Β. – ΦΛΩΡΟΠΟΥΛΟΣ Α. – ΦΩΤΟΥ Φ.